

GPS 衛星の時間の進み方

相対性理論を使わないとGPS位置情報が1日で11kmもずれてしまう？
本当かどうか自分で計算してみました。

1. 特殊相対性理論

特殊相対性理論によれば、慣性系からみて運動している物体の時間は遅れます。
慣性系の時間を t 、運動している物体の時間を τ とすると、次のようになります。

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1-(v/c)^2} \doteq \Delta t (1-(v/c)^2/2) \dots (1)$$

v : GPS 衛星の速度

c : 光(電波)の速度 (3.00×10^8 km/秒)

GPS 衛星の高度は 20,200 km なので、地球の半径 6,360 km を足すと、軌道半径は 26,560 km、GPS 衛星の公転周期は 12 時間なので、GPS 衛星の速度は $v = 2\pi \times 26,560 / 12 / 60 / 60 = 3.86$ km/秒です。

従って、

$$(v/c)^2/2 = (3.86/3.00)^2/2 \times 10^{-10} = 0.828 \times 10^{-10}$$

2. 一般相対性理論

一般相対性理論によれば、重力ポテンシャルの浅い所では深い所より時間が進みます。
重力ポテンシャルゼロの場所での時間を t 、重力ポテンシャルのある場所での時間を τ とすると、次のようになります。

$$\Delta\tau = \Delta t \sqrt{1-2GM/c^2r} \doteq \Delta t (1-GM/c^2r) \dots (2)$$

G : 万有引力定数 (6.67×10^{-20} km³/kg 秒²)

M : 地球の質量 (5.97×10^{24} kg)

c : 光(電波)の速度 (3.00×10^8 km/秒)

$$1/r_1 - 1/r_2 = (1/2.656 - 1/0.636) \times 10^{-4} \text{ km}^{-1} = -1.196 \times 10^{-4} \text{ km}^{-1}$$

従って、

$$GM/c^2r = 6.67 \times 5.97 \times (-1.196) / 3.00^2 \times 10^{-10} = -5.291 \times 10^{-10}$$

3. 相対性理論の影響

$$(0.828 - 5.291) \times 10^{-10} = -4.463 \times 10^{-10}$$

従って、GPS 衛星にアインシュタインの相対性理論を使わないと、

1 日で $4.46 \times 10^{-10} \times 24 \times 60 \times 60 = 3.853 \times 10^{-5}$ 秒だけ時間が進む。

1 日で $3.853 \times 10^{-5} \text{ 秒} \times 3.00 \times 10^8 \text{ km/秒} = 11.6 \text{ km}$ だけ距離がずれる。